

Тема 3. Элементы векторной алгебры.

§1 n -мерные векторы. Линейные операции над n -мерными векторами. Понятие линейного векторного пространства

Определение 1. Упорядоченный набор чисел, записанный в виде $\bar{x} = (x_1; x_2; x_3; \dots; x_n)$, называется **n - мерным вектором**, где $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ - его координаты или компоненты $(\bar{x} \in E^n)$.

Понятие n - мерного вектора широко используется в экономике: некоторый набор товаров можно охарактеризовать вектором $\bar{x} = (x_1; x_2 \dots x_n)$, а соответствующие цены - вектором $\bar{y} = (y_1; y_2 \dots y_n)$.

Векторы можно:

1) умножать на действительное число

$$\lambda \cdot \bar{x} = (\lambda x_1; \lambda x_2; \dots \lambda x_n);$$

2) складывать

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; \dots x_n + y_n).$$

Эти операции обладают следующими свойствами:

1. $\bar{x} + \bar{y} = \bar{y} + \bar{x}$ - переместительное (коммутативное).
2. $\bar{x} + (\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x} + \bar{y}) + \bar{z}$ - сочетательное (ассоциативное)
3. $\alpha(\beta \cdot \bar{x}) = (\alpha \cdot \beta) \bar{x}$ - ассоциативное относительно числового множителя
4. $\alpha(\bar{x} + \bar{y}) = \alpha \bar{x} + \alpha \bar{y}$ - распределительное (дистрибутивное)
5. $(\alpha + \beta) \bar{x} = \alpha \bar{x} + \beta \bar{x}$ - дистрибутивное относительно суммы числовых множителей.
6. Существует нулевой вектор $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ такой, что $\bar{x} + \bar{0} = \bar{x}$
7. Для любого вектора \bar{x} существует противоположный вектор $(-\bar{x})$ такой, что $\bar{x} + (-\bar{x}) = 0$
8. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$ - для любого вектора \bar{x} .

Определение 2. Множество векторов с действительными компонентами, в котором определены действия $\boxed{\bar{x} + \bar{y}}$ и $\boxed{\lambda \bar{x}}$, удовлетворяющие 8-ми свойствам (аксиомам),

называется **линейным векторным пространством**.

§2 Линейная зависимость векторов.

Определение 1. Вектор $\overline{a_m}$ называется **линейной комбинацией** векторов $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_{m-1}}$ векторного пространства R , если он равен сумме произведений этих векторов на произвольные действительные числа:

$$\boxed{\overline{a_m} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \lambda_3 \overline{a_3} + \dots + \lambda_{m-1} \overline{a_{m-1}}} \quad (1)$$

Определение 2. Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \dots, \overline{a_m}$ векторного пространства R называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что:

$$\boxed{\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \dots + \lambda_m \overline{a_m} = 0} \quad (2)$$

В противном случае векторы называются **линейно независимыми** (два неколлинеарных вектора).

Пример: Даны три вектора:
 $\overline{a_1} (1; 3); \overline{a_2} (2; 1); \overline{a_3} (5; 2).$

Доказать, что векторы $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ линейно независимы и выразить вектор $\overline{a_3}$ через $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$.

Решение:

1) Докажем линейную независимость векторов:

$$\lambda_1 \cdot \overline{a_1} + \lambda_2 \cdot \overline{a_2} = 0$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Такая система всегда имеет тривиальное нулевое решение.

Убедимся, что других решений эта система не имеет:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5 \neq 0 \Rightarrow \text{система имеет только}$$

нулевое решение, значит, векторы линейно независимы.

2) Выразим вектор $\overline{a_3}$:

$$\overline{a_3} = \lambda_1 \cdot \overline{a_1} + \lambda_2 \cdot \overline{a_2}$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \\ -5\lambda_2 = -13 \end{cases} \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{1}{5} \\ \lambda_2 &= \frac{13}{5} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{a_3 = -\frac{1}{5}a_1 + \frac{13}{5}a_2}}$$

§3 Базис и размерность линейного векторного пространства.

Определение 1. Линейное пространство R называется ***n*- мерным**, если в нем существует ***n*** - линейно независимых векторов.

Определение 2. Максимальное число (***n***) содержащихся в пространстве R линейно независимых векторов называется **размерностью пространства** и обозначается $\dim (R)$.

Определение 3. Совокупность ***n*** линейно независимых векторов пространства R называется **базисом**.

$(\bar{i} ; \bar{j})$ – базис в E^2

$(\bar{i} ; \bar{j} ; \bar{k})$ – базис в E^3

Определение 4. Если $\overline{e_1}; \overline{e_2}; \overline{e_3} \dots \overline{e_n}$ - базис пространства R , то вектор $\overline{x} = x_1 \cdot \overline{e_1} + x_2 \cdot \overline{e_2} + x_3 \cdot \overline{e_3} + \dots + x_n \cdot \overline{e_n}$ называется **разложением вектора \overline{x}** по базису, а числа $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ - **координатами вектора \overline{x}** относительно этого базиса.

§4 Скалярное произведение двух векторов. Евклидово пространство

Определение 1. Скалярным произведением двух векторов $\overline{x} = (x_1; x_2 \dots x_n)$ и $\overline{y} = (y_1; y_2 \dots y_n)$ называется число

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + \dots + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i$$

Скалярное произведение имеет экономический смысл: если вектор $\overline{x} = (x_1; x_2 \dots x_n)$ - объем

различных товаров, а $\bar{y} = (y_1; y_2 \dots y_n)$ - вектор их

цен, то $\bar{x} \cdot \bar{y}$ - выражает суммарную стоимость товаров.

Скалярное произведение обладает **свойствами**:

1. $\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$ - коммутативность
2. $\bar{x} \cdot (\bar{y} + \bar{z}) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{z}$ - дистрибутивность
3. $\alpha \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = \alpha (\bar{x} \cdot \bar{y})$ - ассоциативность
4. $\bar{x} \cdot \bar{x} > 0$, если \bar{x} - ненулевой вектор
 $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0$, если $\bar{x} = \bar{0}$

Определение 2. Линейное (векторное) пространство, в котором задано скалярное произведение векторов, удовлетворяющее указанным четырем свойствам (аксиомам), называется *евклидовым пространством*.

Определение 3. Длиной или *нормой вектора* \bar{x} в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата:

$$|\bar{x}| = \sqrt{\bar{x} \cdot \bar{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Норма вектора обладает **свойствами**:

1. $|\bar{x}| = 0$, если $\bar{x} = \bar{0}$
2. $|\lambda \cdot \bar{x}| = |\lambda| \cdot |\bar{x}|$, где λ - действительное число
3. $|\bar{x} \cdot \bar{y}| \leq |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|$ - неравенство Коши-Буняковского
4. $|\bar{x} + \bar{y}| \leq |\bar{x}| + |\bar{y}|$ - неравенство треугольника

В евклидовом пространстве можно тоже находить \cos угла между двумя векторами:

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{\bar{x} \cdot \bar{y}}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|}}, \text{ где } 0 \leq \alpha \leq \pi.$$

Из полученной формулы следует, что для n -мерных векторов справедливо определение скалярного произведения, данного для трехмерных векторов.

Определение 4: Скалярным произведением двух ненулевых векторов \bar{a} и \bar{b} называется число, равное произведению их длин на \cos угла между ними.

$$\boxed{\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos \alpha}$$

Определение 5. Два вектора называются *ортгональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

Определение 6. Два вектора считаются коллинеарными если их координаты пропорциональны.

Определение 7. Векторы $\vec{e}_1 ; \vec{e}_2 ; \vec{e}_3 \dots \vec{e}_n$ n -мерного евклидова пространства образуют *ортонормированный базис*, если эти векторы попарно ортгональны и норма каждого из них равна единице, т.е. если

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \text{ при } i \neq j \quad \text{и}$$

$$|\vec{e}_i| = 1 \text{ при } i = 1, 2, \dots, n$$

Во всяком n – мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Пример:

$$\vec{i} \perp \vec{j} ; |\vec{i}| = |\vec{j}| = 1 \Rightarrow$$

E^2 : базис $(\vec{i} ; \vec{j})$ – ортонормированный

$$E^3 : \begin{array}{l} \bar{i} \perp \bar{j} ; \quad \bar{j} \perp \bar{k} ; \quad \bar{k} \perp \bar{i} ; \\ |\bar{i}| = |\bar{j}| = |\bar{k}| = 1 \Rightarrow \\ \text{базис } (\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) - \text{ ортонормированный} \end{array}$$

§5 Линейные операторы

Определение 1. *Оператором* (отображением) линейного векторного пространства называют функцию, определенную на множестве векторов данного пространства и со значениями во множестве векторов пространства:

Определение 2. Оператор φ данного пространства называется *линейным*, если для любых векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}$ этого пространства выполняются соотношения:

$$\begin{array}{l} 1) \quad \varphi(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) = \varphi(\bar{x}_1) + \varphi(\bar{x}_2) \\ 2) \quad \varphi(\lambda \cdot \bar{x}) = \lambda \cdot \varphi(\bar{x}) \end{array}$$

Теорема. Всякая матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

определяет в пространстве R^n линейный оператор φ по закону:

$$\boxed{\bar{y} = A \cdot \bar{x}} \quad , \text{где } \bar{x}, \bar{y} \in R^n$$

В развернутом виде этот закон можно записать так:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

или $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \dots & \dots & \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$

Матрица, о которой говорится в теореме, называется **матрицей линейного оператора φ** и обозначается A_φ .

Равные матрицы задают равные линейные операторы, поэтому линейный оператор, целиком определяется своей матрицей.

Примеры линейных операторов:

1) **Нулевой** оператор, задаваемый нулевой матрицей:

$A_\varphi \cdot \bar{x} = \bar{0}$ - все векторы переходят в нуль - вектор

2) **Тождественный** оператор \mathcal{E} , заданный единичной матрицей E :

$A \cdot \bar{x} = \bar{x}$ - все векторы переходят в себя

3) Оператор подобия в E^2 задается матрицей $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$. Этот оператор каждый вектор $\{x; y\}$

переводит в вектор $\{x'; y'\}$ по формулам:

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Алгебра линейных операторов

При сложении линейных операторов их **матрицы складываются**.

При умножении оператора на число, его **матрица также умножается** на это число.

При умножении операторов их **матрицы перемножаются**.

Матрица обратного оператора **равна обратной матрице** исходного оператора.

§6 Собственные векторы и собственные числа линейного оператора

Определение 1. Ненулевой вектор $\vec{r} \in R^n$ называется **собственным вектором** линейного

оператора Φ , если под действием Φ этот вектор переходит в коллинеарный ему вектор $\lambda \cdot \bar{r} \in R^n$, т.е.

$$\boxed{\Phi(\bar{r}) = \lambda \cdot \bar{r}} \text{ или } \boxed{A_\Phi \cdot \bar{r} = \lambda \cdot \bar{r}}$$

При этом число λ называется **собственным числом** оператора Φ .

Займемся теперь вопросом о нахождении собственных векторов и собственных чисел линейного оператора.

Пусть в R^2 $\varphi: \bar{r} \rightarrow \bar{r}'$, т.е. $\Phi(\bar{r}) = \bar{r}'$, где $\bar{r} = \{x; y\}$; $\bar{r}' = \{x'; y'\}$

Тогда оператор φ можно задать формулами:

$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad (1) \quad \text{или} \quad \text{матрицей}$$

$$A_\Phi = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы \bar{r} был собственным вектором с собственным числом λ ,

нужно чтобы $\bar{r}' = \lambda \cdot \bar{r}$, т.е. $x' = \lambda x$; $y' = \lambda y$

Подставляя эти формулы в систему (1), получим:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = \lambda x \\ a_{21}x + a_{22}y = \lambda y \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (a_{11} - \lambda)x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + (a_{22} - \lambda)y = 0 \end{cases} \quad (2).$$

Полученной системе (2) должны удовлетворять координаты собственных векторов и собственные числа. Эта система однородная, следовательно, она имеет ненулевое решение при условии $\Delta = 0$. Таким образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (3).$$

Это так называемое **характеристическое уравнение** оператора Φ , из которого можно находить собственные числа λ , а затем, используя систему (2), находить собственные векторы, соответствующие этим λ .

Характеристическое уравнение часто записывают в более компактной форме. Преобразуем левую часть:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \\ = |A_{\Phi} - \lambda \cdot E|$$

.

Получим: $\boxed{|A_{\Phi} - \lambda \cdot E| = 0}$ - характеристическое уравнение.

Пример: Найти собственные векторы и собственные числа линейного оператора φ , заданного формулами:

$$\begin{cases} x' = 11x + 12y \\ y' = 12x + 4y \end{cases}$$

Решение:

1) Составляем характеристическое уравнение:

$$|A_{\varphi} - \lambda \cdot E| = 0 \quad \left| \begin{array}{cc} 11 - \lambda & 12 \\ 12 & 4 - \lambda \end{array} \right| = 0$$

$$\lambda^2 - 15\lambda - 100 = 0$$

$\lambda_1 = 20$; $\lambda_2 = -5$ – собственные числа

2) Для нахождения собственных векторов составляем систему (2):

$$\begin{cases} (11 - \lambda)x + 12y = 0 \\ 12x + (4 - \lambda)y = 0 \end{cases}$$

а) при $\lambda_1 = 20$

$$\begin{cases} -9x + 12y = 0 \\ 12x - 16y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{-3x + 4y = 0\} \Rightarrow y = \frac{3}{4}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ c; \frac{3}{4}c \right\}$$

Таким образом, числу $\lambda_1 = 20$ соответствует семейство свободных векторов $\left\{ c; \frac{3}{4}c \right\}$, $c \in R$;

$$\begin{cases} 16x + 12y = 0 \\ 12x + 9y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \{4x + 3y = 0\} \Rightarrow$$

$$\text{б) при } \lambda_2 = -5 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ c; -\frac{4}{3}c \right\}$$

Значит, собственному числу $\lambda_2 = -5$ соответствует подпространство

свободных векторов $\left\{ c; -\frac{4}{3}c \right\} \quad c \in R$

Ответ: имеем собственные числа $\lambda_1 = 20$; $\lambda_2 = -5$ и соответствующие семейства

свободных векторов $\left\{ c; \frac{3}{4}c \right\}; \left\{ c; -\frac{4}{3}c \right\}$.

Отметим, что приведенные рассуждения аналогичны и для R^3 и R^n .

§7 Векторное произведение двух векторов

Определение 1. Векторным произведением двух неколлинеарных векторов \vec{a} и \vec{b} называется такой вектор \vec{c} который удовлетворяет трем условиям (рис.4.4).

Имеет модуль

$$1) |\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b});$$

2) $\vec{c} \perp \vec{a}; \quad \vec{c} \perp \vec{b}$ т.е. перпендикулярен к плоскости векторов \vec{a} и \vec{b} ;

3) направлен так, чтобы тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ была правой.

Обозначение : $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$

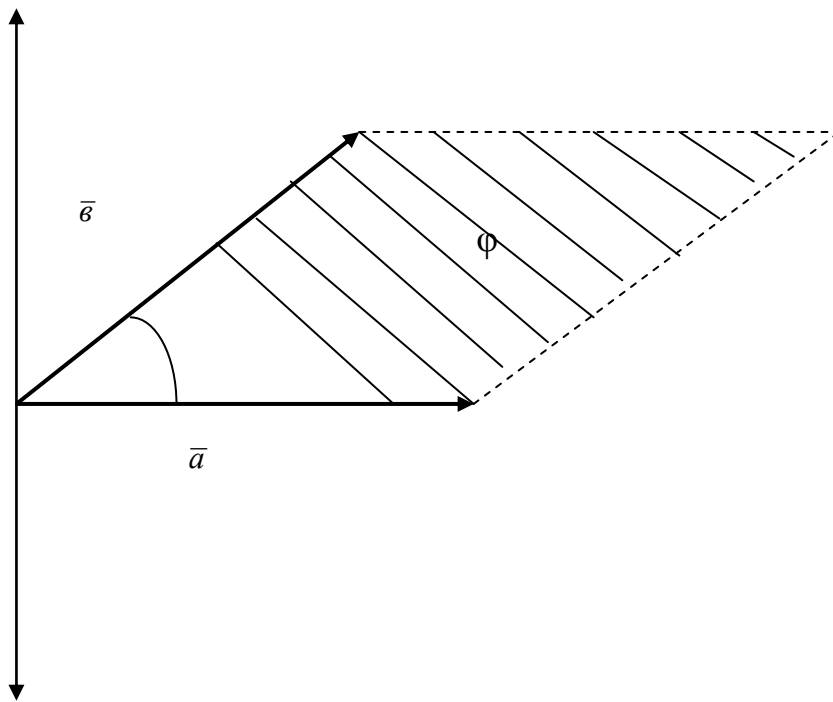


Рис.4.4. К понятию векторного произведения.

Замечание.

1. Приведенные условия однозначно определяют векторное произведение, если сомножители – ненулевые векторы. Если хоть один из сомножителей – нулевой вектор, то векторное произведение равно нулю.

2. Модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма (рис. 4.4), построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} .

7.1 Основные свойства.

1. Векторное произведение двух векторов равно нуль – вектору, если векторы коллинеарны или один из них или оба – нуль-векторы $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ равносильно $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Равенство $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ исключает необходимость вводить понятие «векторного квадрата».
2. Векторное произведение не обладает переместительным свойством, $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ т.е. антикоммутативно.
3. Скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения (свойство сочетательности (ассоциативности) относительно скаляра)
$$(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \times \vec{b}) \quad \text{или}$$
$$(\lambda_1 \vec{a}) \times (\lambda_2 \vec{b}) = \lambda_1 \lambda_2 (\vec{a} \times \vec{b}).$$
4. Распределительное свойство (свойство дистрибутивности):
$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$
$$\vec{c} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{b}$$

Это свойство имеет место для любого числа слагаемых.

Пример 3.

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a} \times \bar{a} - \bar{a} \times \bar{b} + \bar{b} \times \bar{a} - \bar{b} \times \bar{b} = 0 + \bar{b} \times \bar{a} + \bar{b} \times \bar{a} - 0 =$$

$$= 2(\bar{b} \times \bar{a}), \quad \text{так как} \quad \bar{b} \times \bar{a} = -(\bar{a} \times \bar{b}).$$

7.2 Векторное произведение в координатной форме.

Рассмотрим сначала векторное произведение ортов, например : $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$; $\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$; $\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$; $\bar{i} \times \bar{i} = 0$.
В общем случае это можно изобразить схемами и составить таблицу (рис.4.5)

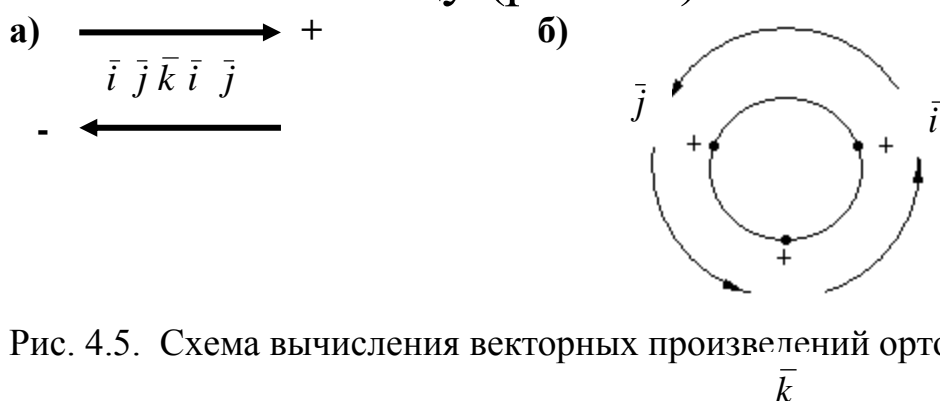


Рис. 4.5. Схема вычисления векторных произведений ортов

в)

+	\bar{i}	\bar{j}	\bar{k}
\bar{i}	0	\bar{k}	$-\bar{j}$
\bar{j}	$-\bar{k}$	0	\bar{i}
\bar{k}	\bar{j}	$-\bar{i}$	0

Если направление кратчайшего пути от 1-го вектора ко 2-му сов-падает с направлением

стрелки, то произведение равно 3-му вектору; если не совпадает, то 3-й вектор берется со знаком минус.

Пусть даны векторы в правой системе координатных осей

$$\bar{a} = x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{b} = x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}$$

Найдем

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (x_1 \bar{i} + y_1 \bar{j} + z_1 \bar{k}) \times (x_2 \bar{i} + y_2 \bar{j} + z_2 \bar{k}) = x_1 \bar{i} \times x_2 \bar{i} + x_1 \bar{i} \times y_2 \bar{j} + x_1 \bar{i} \times z_2 \bar{k} + \\ &+ y_1 \bar{j} \times x_2 \bar{i} + y_1 \bar{j} \times z_2 \bar{k} + y_1 \bar{j} \times y_2 \bar{j} + z_1 \bar{k} \times x_2 \bar{i} + z_1 \bar{k} \times y_2 \bar{j} + z_1 \bar{k} \times z_2 \bar{k} + z_1 \bar{k} \times x_2 \bar{i} + \\ &+ z_1 \bar{k} \times y_2 \bar{j} + z_1 \bar{k} \times z_2 \bar{k} = x_1 y_2 (\bar{i} \times \bar{j}) + x_1 z_2 (\bar{i} \times \bar{k}) + y_1 x_2 (\bar{j} \times \bar{i}) + y_1 z_2 (\bar{j} \times \bar{k}) + \\ &+ z_1 x_2 (\bar{k} \times \bar{i}) + z_1 y_2 (\bar{k} \times \bar{j}) = x_1 y_2 \bar{k} - x_1 z_2 \bar{j} - y_1 x_2 \bar{k} + y_1 z_2 \bar{i} + z_1 x_2 \bar{j} - z_1 y_2 \bar{i} = \\ &= \bar{i} (y_1 z_2 - z_1 y_2) - \bar{j} (x_1 z_2 - z_1 x_2) + \bar{k} (x_1 y_2 - y_1 x_2) \end{aligned}$$

Вполне очевидно, что

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

Полученную формулу обычно представляют в виде символического определителя 3-го порядка, который раскрывается по элементам первой строки.

Итак,

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = [\bar{a}, \bar{b}]$$

Замечание 3. Равенство нулю этого определителя представляет собой условие коллинеарности векторов.

Пример 4. Дано:

$$\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k} \quad \text{и} \quad \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k} . \text{ Найти } \bar{a} \times \bar{b} , \text{ т.е. координаты вектора } \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} .$$

Решение. **1-ый способ :**

$$1) \quad \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0\bar{i} + 4\bar{j} + 4\bar{k}$$

$$2) \quad \bar{c} = \{0; 4; 4\}$$

2-ой способ :

1) Раскрывая скобки и пользуясь схемой (рис.4.5), упростим выражение

$$(3\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}) \times (\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) = 3(\bar{i} \times \bar{i}) - \bar{j} \times \bar{i} + \bar{k} \times \bar{i} + 3(\bar{i} \times \bar{j}) - (\bar{j} \times \bar{j}) + \bar{k} \times \bar{j} - 3(\bar{i} \times \bar{k}) + \bar{j} \times \bar{k} - \bar{k} \times \bar{k} = \bar{k} + \bar{j} + 3\bar{k} - \bar{i} - 3(-\bar{j}) + \bar{i} = 4\bar{j} + 4\bar{k}, \quad \text{т.е.} \quad \bar{c} = \{0; 4; 4\}$$

7.3 Приложения векторного произведения.

1. Вектор Пойнтинга. При изучении распространения электромагнит-ных волн (ЭМВ) будет введено понятие «вектор Пойнтинга», который харак-теризует плотность потока мощности ЭМВ и указывает направление ее

распространения. Вектор Пойнтинга определяется как векторное произведение векторов напряженности электрического и магнитного полей, т.е. $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$. Это можно рассматривать как *радиотехнический смысл* векторного произведения. На основании определения векторного произведения векторов укажем направления распространения ЭМВ при указанных ориентациях векторов \vec{E} и \vec{H} (\vec{c} - вектор скорости распространения ЭМВ) :

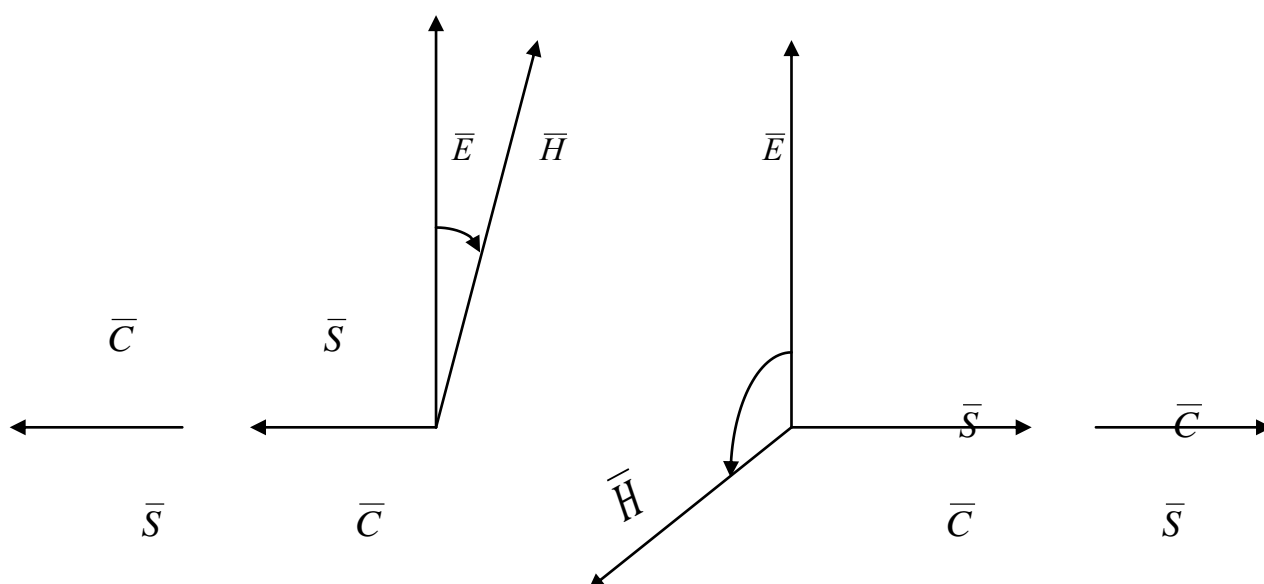


Рис. 4.7. Радиотехнический смысл векторного произведения

2. Вычисление площади параллелограмма и треугольника. Из геометрии известно, что площадь треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

Откуда

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

1) Сначала найдем векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = m\vec{i} - n\vec{j} + p\vec{k}.$$

2) Вычислим модуль полученного вектора

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

Удвоенная площадь такого треугольника будет равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} и \vec{b} . $2 \cdot S_{\Delta} = S$

т.е. $\square \quad S = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Пример 5. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах

$$\vec{a} = \{1; 2; 2\}; \quad \vec{b} = \{4; 3; 5\}.$$

Решение.

$$1) \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$2) \quad S_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \text{ (ед.)}$$

Выводы :

1. Согласно определениям скалярное произведение двух векторов есть число, а их векторное произведение – вектор.

2. Из выражений скалярного и векторного произведений векторов через их координаты устанавливаются условия взаимного расположения векторов в координатной форме :

- условие коллинеарности векторов

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = 0$$

- условие ортогональности векторов

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0$$

3. На основе приложений векторного произведения к геометрии и фи-зике :

а) *геометрический смысл* векторного произведения заключается в том, что модуль векторного произведения двух векторов есть *площадь па-раллелограмма*, построенного на этих векторах;

б) *физический смысл* векторного произведения есть *момент силы*

§8 Смешанное произведение

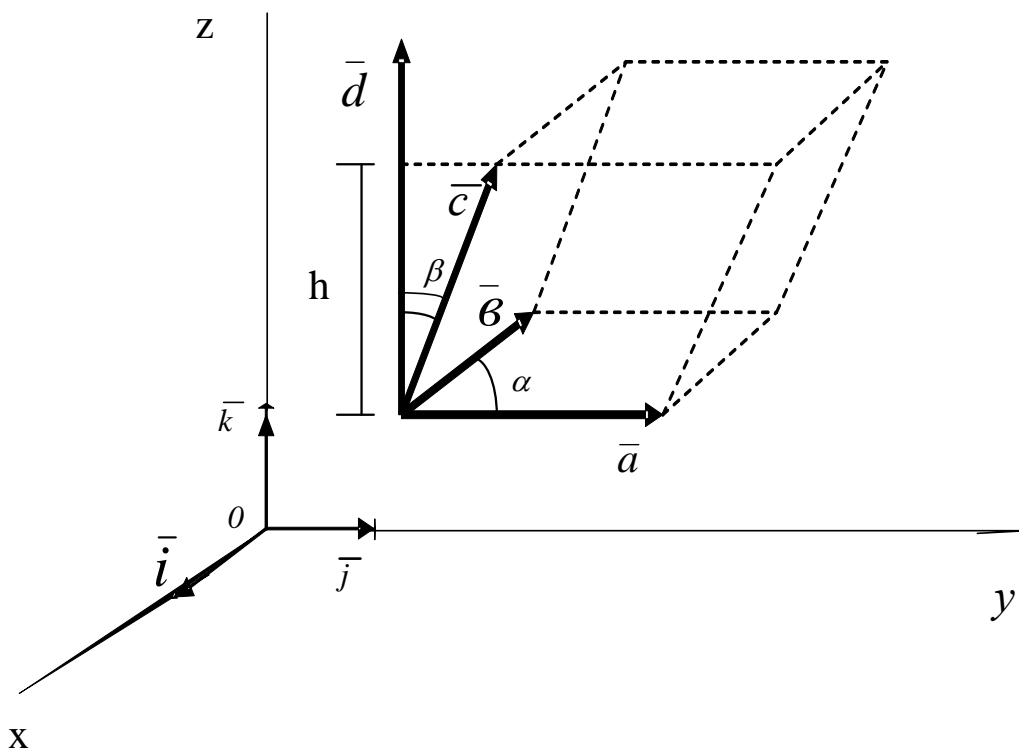
8.1. Определение и геометрический смысл.

Определение. Смешанным (векторно-скалярным) произведением векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} называется число, которое получается в результате умножения векторного произведения $\vec{a} \times \vec{b}$ скалярно на вектор \vec{c} и обозначаемое через \overline{abc} .

Согласно определению

$$\overline{abc} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Дадим геометрическое истолкование смешанного произведения. Пусть векторы \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} не компланарны. Построим на этих векторах параллелепипед Π

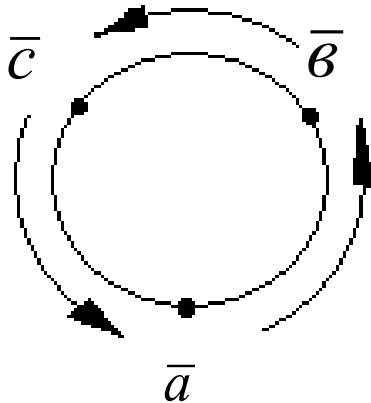


Пусть $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$ тогда $|\vec{d}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\hat{\vec{a}\vec{b}}\right)$ т.е. равен площади параллелограмма S , лежащего в основании параллелепипеда. Если рассмотреть скалярное произведение $\vec{d} \cdot \vec{c} = |\vec{d}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\left(\hat{\vec{d}\vec{c}}\right) = |\vec{d}| \cdot n_{\vec{d}\vec{c}}$, тогда $n_{\vec{d}\vec{c}}$ есть высота h параллелепипеда, так как $\vec{d} \perp \vec{a}$ и $\vec{d} \perp \vec{b}$. Но строго говоря, $n_{\vec{d}\vec{c}} = \pm h$. Поэтому $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = S \cdot (\pm h) = \pm V_{\Pi}$ или $V_{\Pi} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$, где V_{Π} — объем искомого параллелепипеда. Таким образом, смешанное произведение $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ трех некопланарных упорядоченных векторов \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} по абсолютному значению равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс или минус в зависимости от того одноименна или разноименна (правая или левая) тройка векторов с тройкой базисных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. В этом и состоит геометрический смысл смешанного произведения.

8.2. Свойства смешанного произведения.

1. Круговая перестановка трех векторов-множителей смешанного произведения не меняет его значения. Перестановка же двух соседних сомножителей меняет знак произведения на противоположный, т.е.

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = (\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a} = (\bar{c} \times \bar{a}) \cdot \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}) \cdot \bar{c} = -(\bar{c} \times \bar{b}) \cdot \bar{a} = -(\bar{a} \times \bar{c}) \cdot \bar{b}$$



2. Операции скалярного и векторного произведений в смешанном произведении можно менять местами, т.е. справедливо тождество

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}).$$

3. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения, т.е. $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = 0$.

Это означает, что параллелепипед выродился в плоскость.

8.3 Смешанное произведение в координатной форме

Пусть $\bar{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\bar{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, $\bar{c} = \{x_3, y_3, z_3\}$.

Тогда

$$\bar{b} \times \bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Пример Даны векторы

$$\bar{a} = \{1, 0, 1\}, \quad \bar{b} = \{2, 1, -1\}, \quad \bar{c} = \{3, 2, 0\}$$

Определить : $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$.

Решение.

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Ответ : 1) векторы компланарны, так как;
 $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = 3 \neq 0$

2) векторы составляют правую тройку, так как $3 > 0$;

3) объем $V_{\Pi} = 3$ куб. ед.

В заключении можно отметить, что смешанное произведение применяется, помимо вычисления объема параллелепипеда, также для вычисления

объема пирамиды, построенной на векторах (тетраэдра) :

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6} V_{\Pi} = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Выводы. При умножении трех векторов с комбинированным применением скалярных и векторных произведений двух векторов в результате возможны :

1. Простое произведение. Например, в случае $(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{c}$ результатом является вектор, коллинеарный вектору \vec{c} .

2. Двойное векторное произведение, в результате которого получается :

а) в случае $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ - вектор, компланарный с векторами \vec{a} и \vec{b} .

б) в случае $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ - вектор, компланарный с векторами \vec{b} и \vec{c}

3. Смешанное произведение, результатом которого есть число, которое, взятое по модулю, определяет объем параллелепипеда, построенного на векторах – сомножителях.